ОПЫТ РАБОТЫ

УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПО ВНЕДРЕНИЮ АВТОРСКОЙ ПРОГРАММЫ

ИНТЕГРИРОВАННОГО КУРСА

МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

1988—1990г.г.

С. Ш. № 100
г. Одесса

1.Мотивы создания курса и теоретическая база курса.

Прикладная направленность того или иного курса традиционно сопровождается некоторой необязательностью по отношению к теоретическому фундаменту курса , его основаниям. Причина этого, как мне кажется, лежит в близкодействующих прагматических установках, нацеливающих на рассмотрение базового предмета, как инструментария (данного и незыблемого) для прикладника, исключительной целью которого ставится требование лишь владения инструментом,без достаточного проникновения в технологию его разработки. Этот подход имеет много сторонников и , впрочем, не несет ничего порочного до тех пор , пока требует (и это в большинстве случаев оправдано) только исполнительских качеств прикладника. Недостаток выплывает при необходимости создавать новый инструментарий, методы, руководствуясь возникающими прикладными проблемами, решения которых недостижимы существующим инструментарием.
И тогда пренебрежение к базовым , понятийным, конструктивным аспектам математического знания, в угоду исключительно пользовательским целям, оборачивается беспомощностью, немощью перед лицом нестандартных проблемных ситуаций. Не тренированный строительством теорий, вырастающих из потребностей практики, доказательством теорем, обедненный модельно и языково, лишенный организованности и самостоятельности, мозг капитулирует.
Как правило, потребительский подход к образованию призывает к действию методики, способные к формированию ритуального мышления достаточного лишь для нормативных ситуаций, оснащенных инструкцией. Упрек по поводу идеологической недостаточности курса прикладной математики не единственный. В содержательном отношении курс прикладной математики по существу не претерпел никаких изменений с 1961 года ,когда он впервые появился в классах с углубленным изучением математики, разве что один язык программирования заменялся на более модный(синоним современного). Прикладная же математика, по существу, представлялась математикой вычислительной, как ее единственной алгоритмической базой, и в перечислении тем конечно важных, однако весьма недостаточных для обслуживания алгоритмических

ситуаций, возникающих в приложениях. Кроме того и базовый курс математики лишь в очень незначительной степени был способен обслуживать ортодоксальный прикладной курс, практически скопированный с институтского, и уж никак не был готов служить базой для отсутствующих в нем разделов, связанных с огромным ассортиментом новых алгоритмических задач и техник,появившихся с развитием вычислительной техники и расширением областей ее применения. Разумеется, представить во всей полноте все эти проявления современной прикладной математики задача, для школы даже углубленной в математику, непосильная и излишняя. Однако подготовить ум ученика к восприятию новых идей, понятий и задач вполне возможно и даже необходимо. Возможно потому, что большинство новых приложений по уровню идейности и элементарности ближе к традиционному школьному курсу математики (поскольку не требует привлечения инфинитизимальных конструкций, которых в школе не даются с должным обоснованием, а значит,используются на ритуально-догматическом уровне и не оказывают культурно - методологического воздействия).

И тут мы затрагиваем другой и, пожалуй, самый важный аспект продвинутого школьного математического образования.

Какова вообще цель преподавания математики в школе? Представление математики как слуги всех точных наук в этаком прагматическом аспекте конечно же возможно, однако категорически вредно, поскольку ограничено. Математика представляет собой систему, дисциплину мышления основанную на присущую человеческому мозгу способности к построению иерархии языковых конструкций—понятийных моделей в качестве образов реальных явлений. Возможно наш мозг обладает способностью, отражать объекты мира, события в нем и явления в символах , одновременно соединять эти символы в структуры, отражающие присущие этим объектам в реальном мире связи- - в язык ( синтаксис и семантику). Причем, способность мозга к ассоциированию—созданию ассоциативных циклов-блоков, иерархически организованных, и есть то, что мы называем мышлением.И если установить связь: ассоциативный блок---понятие, то становится ясно, что мышление, отображенное в языковых конструкциях и есть математика, а логика в ней-- это правила по которым отображение осуществляется. Поэтому математика --культурологическое явление и культура эта, как культура мышления играет, точнее должна играть, самую важную роль в формировании человека, как человека мыслящего т.е. разумного(если нам, конечно, такой нужен).Тут возможны возражения: позвольте, а эмоции, а литература , искусства всякие-- какая их роль? Однако никакого противоречия нет.Это тоже языки—язык живописи, язык музыки, язык танца, как и языки математики, и они служат для передачи эмоциональных состояний, ощущений, переживаний и в конечном счете дополняя друг друга и проникая друг в друга,взаимодействуя дают нам возможность полнее постигать суть явлений. Мышление в конце концов хоть и важнейшее из человеческих проявлений, однако-же далеко не единственное. Такой подход, кстати, многое меняет и, в частности, из него следует:

1.Математика относится к дисциплинам культурологическим, гуманитарным.

2.К математике, как и к языкам способны все, только в разной степени. ( Это данность изначальная, но в разной мере)

3. То, что называется неспособностью к математике, проблема психологическая и состояние приобретенное воспитанием (разумеется

здесь не идет речь о паталогиях врожденных генетических или приобретённых, т.е. не о любых повреждениях мозга)

4.Обучение математике должно быть не нормативным, а напряженным, так как именно постоянное, подпороговое напряжение способно развивать и формировать морфологию мозга.

5.Напряженность занятий должна достигаться соответствующим динамическим уровнем проблемности (нестандартные , безадресные задачи , посильные сверхзадачи) но ни в коем случае объемной монотонностью.

6.Любыми путями добиваться личной заинтересованности в преодолении интеллектуального препятствия.

7.Обучение математике должно осуществляться в положительном эмоциональном пространстве и в связи с другими искусствами. *

Между вузовской и школьной математикой существует “ничья земля” то есть темы важные для образования фундаментального и прикладного, в школе не затрагиваемые, а в вузе опускаемые. Незначительно представлена в традиционном курсематематики фундаменталь-ная алгоритмическая составляющая, то есть те конструктивные математические приемы и методы, те понятийно-языковые средства, те методологические компоненты, без которых немыслима познавательная, творческая деятельность математика, как в прикладных областях так и в самой математике(имеются в виду алгоритмические проблемы математики). Разумеется, в процессе работы в реальной проблемной ситуации,творческий разум отыщет способы заполнить эти образовательные прорехи самостоятельно и отыщет решение, однако разум еще и подготовленный сделает это быстрее и лучше. Автор этих строк в свое время оказался в точности такой ситуации и пришел к осознанию этих вещей отнюдь не умозрительно. Разрабатывая программу курса, обдумывая его содержание, я учел весь свой предшествующий алгоритмический и постановочный опыт(построение математических моделей и их решение в разных прикладных ситуациях), а также последующий преподавательский. Поэтому основу предлагаемого курса составила понятийно-языковая общематематическая база, которая должна развиваться по мере продвижения учащихся по курсу. Причем за счет того, что прикладная часть курса не выделялась в отдельный курс, а органически соединяла экзистенциальные и конструктивные аспекты, возникла возможность заложить предпосылки для формирования прикладника творческого, владеющего общематематической методологией, языком и понятийным аппаратом математики , способного строить в проблемных ситуациях свои алгоритмические средства. Органичность соединения прикладного и фундаментального аспектов математики формировалось за счет постоянного ассоциирования понятий и приемов , за счет освещения одних и тех же математических ситуаций с разных сторон, разными языковыми(математическими) средствами и во взаимосвязи другими разделами курса. Например, понятие комплексного числа вводилось одновременно:

1.как множество точек плоскости со специальным умножением(язык аналитической геометрии)

2.как множество векторов с операцией комплексного умножение векторов то есть сочетающее в своем определении скалярное умножение и внешнее произведение вместе с геометрической интерпретацией обеих (язык векторов)

3.как множество матриц второго порядка специального вида со стандартными матричными операциями(язык матриц и линейных отображений)

4.как алгебраическое расширение поля **R** по элементу $i$, удовлетворяющему соотношению $i^2 = -1$

5.как факторкольцо кольца многочленов по идеалу ( $x^2 + 1$ )

Все это, разумеется, с доказательством изоморфности всех этих моделей и, разумеется, к этому времени ученики были готовы к восприятию всех этих описаний.
Вопрос имеет ли смысл так перегружать тему?

Но дело в том что во-первых это годится для подготовленного слушателя, во-вторых запоминанию подлежали лишь описания 1,2 и 4 и в третьих, сила математики солстоит в возможности описывать одну и ту же ситуацию равносильно, разными языками, в зависимости от контекста ситуации, что позволяет выбирать наиболее эффективное,для понимания проблемы и ее разрешения, описание. И ,кстати, другой сильной стороной математики является прямо противоположное ее свойство – представлять одну языковую модель для огромного количества на первый взгляд далеких друг от друга явлений. Упрощенно, математика предоставлят возможность говорить многими словами об одном и одним словом о многом.
Теоретическая база курса выполнена в виде систематического развития и применения стандартных фундаментальных математических понятий и структур (элементы терии множеств и отображений, элементы матлогики с базовыми предикативными формулами, отношения порядка и эквивалентности). И все это без заигрывания и упрощенчества, однако с привязкой к традиционной школьной математике, её основными требованиями к понятиям и навыкам (как ориентирующим минимальным выходным параметрам) и методически адаптировано к восприятию учащимихся. Эти весьма сложные требования потребовали перегруппировки традиционных тем, приоритетов, введения новых тем, изменения структурных связей, разработки новых языковых подходов к трудным темам, как правило исключаемых даже из продвинутых школьных курсов. Например, обоснование основных числовых объектов и их конструирование—тема, которая в отношении действительных чисел во многих университетах стыдливо сводится к перечислению аксиом, в курсе заняла важное место. Выбранный способ ее представления позволил не только осуществить строгое построение модели вещественных чисел, сформулировать и доказать все важнейшие их свойства, но и создать фундамент для теории пределов, а также подготовить к осознанному употреблению весь зоопарк элементарных функций с доказательством существования их обратных. И то, что тема была не только понята на идейном уровне, но и была воспроизведена учащимися в полном объеме на семинарских занятиях, оказалось важным признаком правильности подхода. В курс введены элементы теории чисел в качественном и алгоритмическом(параллельном) изложении, такие важные для приложений темы, как суммирование(приемы суммирования, многомерные суммы, задание и преобразование областей суммирования), целые и дробные части и их свойства, задание целочисленных областей, основные приемы подсчета, элементы теории выпуклых множеств и функций, элементарные методы решения экстремальных задач. Особо хочется отметить введение в курс теорию рекуррентных соотношений.

Эта тема является особенной во всех отношениях.Во-первых она позволяет осуществить исключительную для школьной математики возможность связать разрозненные темы: задание последовательностей,прогрессии, суммирование, задачи подсчета, комбинаторику, математическую индукцию, теорию делимости, диофантовы уравнения, тригонометрию, комплексные числа, алгебру многочленов; во-вторых служит прекрасным полигоном предваряющим теорию дифференциальных уравнений 1-го и 2- го порядка с постоянными коэффициентами. Рекуррентные соотношения, являясь дискретным аналогом дифференциальных уравнений (также кстати, как суммирование и разностный оператор являются дискретными аналогами интегрирования и дифференцирования) в то же время в качестве технической базы предполагают только знание квадратного трехчлена(если ограничится рекуррентными соотношениями 2-го порядка с постоянными коэффициентами, дробно-линейными или системами 1-го порядка с двумя неизвестными). Все эти качества делают эту тему особенно значимой для школы в методическом и познавательном смысле.

Новым также является введение языковых средств линейной линейной алгебры и понятия многомерности, что позволило органически соединить алгебраическую и геометрическую составляющие курса. И наконец очень серьезный курс математического анализа, полностью доказательный и почти не уступающий университететскому и обзорный спецкурс по дифференциальным уравнениям с практикумом и зачетом.

А что геометрия? Она нисколько не пострадала, только акцент на первичность доказательной алгебраической составляющей курса, позволил освоить всю школьную геометрическую тематику в очень короткий срок и весьма эффективно, поскольку опирался на подготовленное формально-логическое мышление. Более того,аналитическая геометрия была представлена значительно полнее чем традиционно и в теоретическом и в практическом отношении и была естественной иллюстрацией проникновения алгебраических методов в геометрию. Вместе с этим, примеры эффективности применения геометрического языка и методов в решении алгебраических задач, способствовали подтверждению идеи единства математики, взаимосвязанности ее разделов, результативности возможности полиязычных описаний. Понятно из всего уже сказанного что новый курс предложил учащимся повышенные требования, и не столько в силу его сложности и емкости, сколько в психологическом и нравственном плане. Нужно отметить, что лишь учащиеся, организующие свои занятия не по принципу “самосвала”, а по принципу “автопогрузчика”, заинтересованные в овладении знаниями, привыкшие подчиняться собственным волевым установкам(свободная личность), а не внешним волевым установкам(зависимая личность?). творчески ориентированные, способные целенаправленно трудиться, трудиться самостоятельно в том смысле ,что способны принимать и исполнять принятые решения, лишь такие показывали постоянную динамику роста и не только математической но и нравственной результативности.

Класс набирался не из звезд, таких на период набора не оказалось. Это были ребята, знающие чего хотят, и согласившиеся на тяжелый труд. Были случайные (не обладающие должными волевыми качествами, пассивные)-- они отсеялись. Один ушел по болезни и один, осознав отсутствие должной заинтересованности в процессе и результатах.

Класс изначально обладал незначительной дисперсией и достаточно высоким математическим ожиданием.За время учебы дисперсия увеличилась, уровень нестандартности и самостоятельности мышления заметно повысился у всех, но все-же появилась группа из 5—6 человек лидеров, и еще 6-7 человек с высокой результативностью. Средний состав из 9 человек, и 2-3 отстающих, причем на сложных темах. В классе регулярно проводились тематические зачеты, семестровые экзамены по математике, семинары. Была организована опережающая (задолго до окончания учебного года) сдача экзаменов по годовым курсам биологии и географии, введены новые формы обучения и сдачи экзаменов по литературе.

Учащиеся класса занимали призовые места на районных и областных мероприятиях связанных с математикой, информатикой, физикой. Активно участвовали в предметных олимпиадах и конференциях по химии,биологии, литературе и языку.

Три первых места на районной конференции по математике( две исследовательские темы);

2-е и 3-е места на районной и второе место на областной олимпиадах по математике и третье место на республиканской олимпиаде.

19 из 22-х человек ориентировались на дальнейшую учебу в области математики и программирования.

После окончания школы и успешной сдачи совместных выпускных и вступительных в ВУЗы экзаменов поступили:

12 человек на механикоматематический факультет ОГУ;
1 человек на мехмат в МГУ
1 человек на химфак ОГУ
1 человек на физфак ОГУ
1 человек на астрономическое отделение физфака ОГУ
6 человек в Политехнический институт на ЭВМ.

Причём нужно особо отметить тот факт, что учащиеся, которые выбрали местом получения высшего образования мехмат ОГУ и Политехнический институт, получили возможность вместо традиционных выпускных экзаменов на Аттестат о среднем образовании сдавать вступительные экзамены в вышеупомянутые учебные заведения.

И право на участие в таком необычном эксперименте они заслужили заняв, первое место в отборочном соревновании с учащимися других школ. Идея такой необычной сдачи выпускных экзаменов, как впрочем и идея опережающей здачи экзаменов по биологии и географии принадлежит автору этих строк. Однако осуществление всех этих нетипичных выпускных экзаменов стало возможно благодаря согласованному и заинтересованному взаимодействию руководства этих институтов и отделов народного образования поддержавших эту идею.

(Было приятно видеть на выпускном вечере радостные лица выпускников которые за два месяца до официальных вступительных экзаменов были извещены о своём поступлении).

Также весьма непрывычным было видеть в школьном расписании еженедельно проводимый семинарский день. Вэтот день свободный от других предметов (кроме одного урока английского языка) всё учебное время посвящалось математике в форме свободного общения (без разбивки на уроки и выставления оценок) учеников, учителя и выездной группы студентов мехмата ОГУ осуществлявших на месте занятия воскресной математической школы при ОГУ. Общения в форме семинарских занятий, докладов учащихся о проделанных мини исследованиях, обсуждения сложных тем текущего курса математики.

P.S. Разумеется, я не предполагаю массовое воспроизводство этого опыта. Это невозможно и, в общем-то,не нужно, поскольку опыт этот экстремальный. Однако он показал какими могут быть установки в преподавании математики и какими по мнению автора они должны быть в принципе, показал возможный путь реализации этих установок, а также обозначил некие границы их осуществимости. И пожалуй самая главная идея заключена в необходимости пересмотра роли курса математики в школьном образовании, его содержания и методологических приоритетов. В конечном счете не так уж и важны объемные и ассортиментные параметры возможных вариантов курса школьной математики, предлагаемых тем или иным учащимся, а важен уровень ассоциированности понятий, техник, приемов, методов и важны методологические установки , понижающие степень ритуального поведения.

Аркадий М. Альт

Примечание.
В дополнение к данному тексту прилагается авторская двухгодичная программа по экспериментальному углублённому курсу математики и основам алгоритмизации и программирования.

**«СОГЛАСОВАНО»**
**Заведующий школьным**
**отделом ОБЛОНО**
**В.Г.Мельник**

**«УТВЕРЖДАЮ»**
**Заведующий ОБЛОНО**
**Л.И.Фурсенко**

**ПРОГРАММА**
**по углублённому курсу математики и основам алгоритмизации для классов с углублённым изучением математики и информатики.**
**9-ый класс**

Учитывая чрезвычайно большую роль фундаментального математического образования и разработанного математического мышления в решении теоретических и практических задач информатики и имея целью выроботку определенной алгоритмической культуры мышления, а также потребности информатики на уровне разработки алгоритмов для реализации на ЭВМ с учетом их физических и структурных возможностей , предлагается следующая сквозная программа по основному курсу математики и прикладным, алгоритмическим ее аспектам. Эту программу предназначенную для классов с углубленным изучением математики и информатики можно представить в виде объединения двух условно выделенных, но взаимосвязанных теснейшим образом курсов..

1. Базовый курс математики с акцентом на алгоритмические и конструктивные аспекты.

2. Спецкурс или точнее, серия спецкурсов под ОБЩИМ названием "математические основы алгоритмизации"

Использование алгоритмического языка как дополнительного общематематического языкового средства алгоритмической направленности в форме алго-математического лексикона , избавит от необходимости его независимого, отдельного рассмотрения в курсе информатики и высвободит время для более глубокого изучения языков программирования. Часть курса , отнесённая собственно к программированию, то есть языки и системы программирования , будут осваиваться практически, непосредственно на ПЭВМ. Кроме того , в плане практической работы на ПЭВМ , предусматривается доведение до рабочих программ всех алгоритмов, рассматриваемых в курсе математики и алгоритмизации , а также планируется работа школьников по индивидуальным и групповым заданиям на разработку обучающих , демонстрационных, прикладных программ.

Примечание к программе.

Реализация предлагаемой программы предусматривает динамичное перераспределение ресурсов времени, изменение порядка следования тем и подтем в пределах выделенного на весь курс обьёма времени и при условии выполнения главного требования: изложение курса должен быть логически последовательным, неукоснительно доказательным, напряжённым и оптимально адаптированным к потенциалу учеников , который в свою очередь должен расти подчиняясь этому напряжению. (смотри дополнение )

**П Р О Г Р А М М А**
**ПО ГЕОМЕТРИИ** **(3 часа в неделю; всего 102 часа)**

## *Тема 1. Повторение курса планиметрии (15ч.)*

Дискриптивная геометрия плоскости. Метрическая геометрия плоскости. *Применение тригонометрии в решении геометрических задач. (+9 ч.)

## *Тема 2. Начала стереометрии.(12 часов)*

Основные понятия. Аксиомы стереометрии. Примеры пространственных фигур. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве (пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые). Параллельное проектирование и его основные свойства. Изображение пространственных фигур на плоскости. Основные типы задач на построение в пространстве.

## *Тема 3. Перпендикулярность, и параллельность в пространстве ( 25 ч)*

Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак.

Теоремы о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

Взаимное расположение двух плоскостей. Признак параллельности плоскостей. Теоремы.

Взаимное расположение прямой и плоскости (параллельные и пересекающиеся).

Признаки параллельност и.

Перпендикулярность плоскостей. Признаки.

Ортогональное проектирование. Теорема о трех перпендикулярах.

## *Тема 4. Расстояния и углы. (20 ч)*

Расстояние от точки до фигуры. Теорема.. Расстояние между двумя фигурами.

(Расстояние между параллельными плоскостями, прямой и плоскостью, скрещивающимися прямыми) . Теорема Пифагора в пространстве.

Угол между лучами.. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Двугранный угол, линейный угол двугранного угла. Угол между плоскостями .

Трёхгранный угол. Зависимость между элементами трёхгранного угла.

Многогранные углы.

## *Тема 5. Пространственные фигуры и тела. ( 30 ч)*

Сфера и шар. Теорема о пересечении сферы плоскостью. Касательная плоскость к шару. Опорная плоскость. Ограниченная фигура. Диаметр фигуры. Выпуклые фигуры. Теорема Хелли. Многогранники. Теорема Эйлера. Цилиндр. Прямой круговой цилиндр, сечения его плоскостью. Конус. Прямой круговой конус. Усечёный конус . Конические сечения. Граничные и внутренние точки фигуры. Тело. Поверхность . Понятие о центральном проектировании. Элементы проективной геометрии.

**ПРОГРАММА**

**ПО ОСНОВАМ АЛГЕБРЫ, МАТ.АНАЛИЗА И АЛГОРИТМИЗАЦИИ.**
**4/5 (+ 3)=7 /8 часов в неделю, итого 254 часа/,**

**(Вопросы программы отмеченые * вынесены в спецкурс)**

## 1. Базовые понятия математического и алгоритмического языка / 15 часов /

Высказывания. Алгебра высказываний. Множества. Предикаты. Истинность и ложность предикатов. Алгебра предикатов. Константы. Переменные. Оператор присваивания. Ветвление по условию. Способы задания множеств. Алгебра множеств. Скобочные записи предикатов. Равносильные преобразования предикатов. Декартово произведение множеств. Отношения порядка и эквивалентности. Теорема о разбиении множества на классы эквивалентности. Закон соответствия. Отображения. Области определения и значений. Множество значений и прообразы. Классификация отображений. Композиция отображений. Обратное отображение. Взаимнооднозначное соответствие и изоморфизм множеств. Именующее отображение и параметризации классов. Конечные множества. Бесконечные множества. Основные свойства конечных множеств.

## 2. Основные числовые множества. / 37 ч /

Множество натуральных чисел – $\boldsymbol{N}$. Порядок в $\boldsymbol{N}$. Свойства неравенств.Перечисление элементов в конечных множествах. Конечные и бесконечные последовательности. Линейные таблицы. Команда повторения. Циклы. Операции max и min, max и min алгебра.Упорядочение.Сортировка.Порядковая аксиоматика натуральных чисел. Принцип наименьшего натурального числа. Принцип и метод математической индукции и его приложения. Реккурентное задание последовательностей. Рекурсия. Цикл суммирования и оператор суммирования. Основные свойства оператора суммирования. Разностный оператор. Свойства. Разностный метод суммирования.Суммирование по частям. Алгоритмические аспекты суммирования. Многомерные таблицы. Перечислительные свойства конечных множеств, основные принципы подсчета. Формула включений и исключений. Приложения. Целые и рациональные числа и их построение. Множество $\boldsymbol{Z}$ – целых чисел и множество $\boldsymbol{Q}$ -- рациональных чисел, их алгебраические и порядковые свойства. Теорема о представлении в $\boldsymbol{Z}$ , деление с остатком. Позиционные системы счисления.

## 3. *Введение в целочисленную математику 1: (теория делимости в Z) : (28 часов , спецкурс, параллельно)

Свойства делимости. Простые числа, существование простых делителей. Бесконечность множества простых чисел. Решето Эратосфена, обоснование. Множество делителей, множество общих делителей и общих кратных. Наибольший общий делитель-- н.о.д., взаимная простота. Строение идеалов в кольце $\boldsymbol{Z}$ , теорема о линейном представлении н.о.д. Критерий взаимной простоты. Лемма о сохранении. Алгоритм Эвклида. Линейное представление остатков в алгоритме Эвклида. Решение линейных диофантовых уравнений. Непрерывные дроби, основные соотношения. Основные теоремы теории делимости. Основная теорема арифметики. Алгоритм Ферма поиска простых делителей. Алгебраические свойства наибольшего общего делителя, как бинарной операции. Классы вычетов по модулю, теория сравнений. Китайская теорема об остатках.( форма Лагранжа и форма Ньютона). Решение линейных сравнений и их систем. Малая теорема Ферма. Функция Эйлера. Три теоремы об изоморфизме. Вычисление функции Эйлера.Теорема Эйлера. Практикум по теории делимости. (*Дополнение: решение диафантовых уравнений 2-го порядка)

## 4. Построение действительных чисел

Неполнота множества рациональных чисел. *Рациональные приближения к $\sqrt{2}$ .

Конструкция множества ***R*** – действительных чисел. Sup и Inf ограниченных числовых множества в ***R***. Полнота действительных чисел. Свойства Sup и Inf. Существование корней и логарифмов.

### *Рациональные функции ( 12ч.)

Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств.

### *Степенная и показательная функции. Обратные им функции. (23ч.)

Свойства, графики. Решение иррациональных, показательных, логарифмических уравнений и неравенств и их систем.

### *Тригонометрические функции ( 30ч. ).

Свойства, графики, основные тождества. Обратные тригонометрические функции.

Решение тригонометрических уравнений и неравенств, систем.

**4.** ***продолжение***

Последовательности в ***R*** ,определение предела последовательности. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши, признак Вейерштрасса сходимости монотонных последовательностей, «аксиома» о вложенных отрезках – как эквиваленты свойства полноты множества ***R.*** Теоремы о подпоследовательностях. Бесконечно малые последовательности. Теоремы о пределах. Основные пределы. Числа $e$ и $\pi$ . *Теорема Штольца. Практикум по пределам.

## *5.* Топологические свойства множества R и его подмножеств. (8 ч.)

Открытые и замкнутые множества. Внутренние, граничные и предельные точки. Окрестности. Связность.Покрытия. Компактность. Критерии компактности. Строение связного и компактного множества.

## *6.* Отображения числовых множеств (функции) . (20ч.)

Ограниченность и монотонность функций. Выпуклость, вогнутость. Предел функции. Определение предела функции по Коши и по Гейнэ. Их эквивалентность. Основные пределы. Локально эквивалентные функции. Непрерывность (локальная и глобальная). Непрерывность элментарных функций.Критерий выпуклости, вогнутости для непрерывных функций. Компактность и связность при непрерывном отображении. Строение образа отрезка при непрерывном отображении. Теорема о существовании и непрерывности обратной к непрерывной.

Четность и нечетность функций.Периодичность:периодические множества, периодические функции; свойства периодических функций; периодичность непрерывных функций. *Всюду плотные множества. *Теорема Кронекера. *Критерий периодичности суммы периодических функций.

Ассимтотическое поведение функций. Нахождение ассимптот.

Производная. Геометрический и физический смысл. Идея локальной лианеризации и дифференциал дифференцируемой функции. Алгебраические свойства производной.Производная сложной функции. Логарифмическая производная. Производные элементарных функций. Локальный экстремум. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Повторные производные.Критерии монотонности , локального экстремума. Условия выпуклости и вогнутости для дифференцируемых функций. Точки перегиба. Исследования поведения функций и построение их графиков с использованием производной. Глобальный максимум (минимум).

Использование производной в задачах на поиск набольшего ( наименьшего) значения и доказательство неравенств.

7. ***Доказательство неравенств, решение многомерных экстремальных задач с ограничениями на область изменения переменных.**

Классические неравенства. Фундаментальные основы поиска экстремума. Простейшие экстремальные задачи. Принцип последовательной минимизации (иллюстрация: метод наименьших квадратов). Принцип динамического программирования. Параметрический метод в решении экстремальных задач. Задачи геометрического программирования. Принцип линейного программирования. Минимаксное неравенство . Понятие двойственности. Неравенства и экстремальные задачи связанные с выпуклостью. Цикл задач на оптимизацию.

8**. *Решения рекуррентных соотношений и функциональных уравнений.**

**9. Алгебра многочленов - 20 часа.**

Операции над многочленами. Кольцо многочленов. Теорема о представлении 1. Лемма о сохранении, НОД, НОК, алгоритм Эвклида. Теорема о строении идеалов в кольце многочленов.. Взаимная простота. Теорема о представлении 2. Алгоритмическое построение многочленов. Простая схема Горнера. Китайская теорема об остатках (форма Лагранжа, Ньютона). Корни многочленов, теорема Виета. Простые и кратные корни. Критерии кратности. Приводимость, неприводимость.Обобщенная схема Горнера. Форма Тейлора для многочленов. Многочлены Чебышева, их свойства.

Многочлены от многих переменных. Однородные и симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Представление симметрических многочленов через элементарные. Приёмы и методы решения уравнений высоких степеней. Алгоритмические вопросы алгебры многочленов.

**10** ****Введение в целочисленную математику 2:(целые части, элементы теории подсчёта)***

Аксиома Архимеда, целые и дробные части. Свойства. Один способ представления вещественного числа, как предел последовательности рациональных чисел. Неравенства и система неравенств в ***Z.*** Целочисленные решетки. Области на плоскости и на целочисленных решётках, заданные системами неравенств. Подсчет целых точек в областях на решётке. Условия непротиворечивости и метод последовательного вытеснения в решении систем неравенств. Различные эквивалентные способы задания областей. Суммы по многомерным областям, повторное суммирование. Преобразования многомерных сумм. Задачи на алгоритмизацию, приводящие к подсчету целых точек и эффективное задание областей.

**Автор программы Альт Аркадий Маркович**

**«СОГЛАСОВАНО»**
**Заведующий школьным**
**отделом ОБЛОНО**
**В.Г.Мельник**

**«УТВЕРЖДАЮ»**
**Заведующий ОБЛОНО**
**Л.И.Фурсенко**

**ПРОГРАММА**
**по углублённому курсу математики и основам алгоритмизации для классов с углублённым изучением математики и информатики.**
**10(11)-ый класс**

**ПРОГРАММА**
**ПО ОСНОВАМ АЛГЕБРЫ, МАТ. АНАЛИЗА И АЛГОРИТМИЗАЦИИ**

**(3+2+2=7 часов в неделю, всего 233 часов)**
**(вопросы программы отмеченные * отнесены к спец. курсу)**

## ТЕМА 1. Логарифмы (повторение) - 14 часов

Логарифм. Логарифмическая функция. Логарифмические, показательные функнции. Уравнения, неравенства, системы уравнений, системы неравенств с логарифмической функцией. Задачи с параметром.

## ТЕМА 2. Первообразная. Неопределенный интеграл - 12 часов

Первообразная. Неопределенный интеграл. Свойства.Таблица неопределенных интегралов. Метод подстановки . Интегрирование по частям. Интегрированне рациональных выражений. Гипербол ические функции. Гиперболические и тригонометрические подстановки.

## ТЕМА 3. Определенный интеграл - 22 часа

Суммы Дарбу. Интегральные суммы.Свойства сумм Дарбу. 0пределение интеграла, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Критерии и признаки интегрируемости. Теорема Дарбу. Основные приемы вычисления определенного интеграла. Приближенное вычисление определенных интегралов.Вычисление площадей поверхностей и обьёмов с помощью интегрирования. Вычис ление длины дуги кривой. Вычисление поверхности тела вращения. Вычисление пределов с помощью интегралов и бесконечных сумм. Интегралы с переменным верхним пределом, свойства. Теоремы о среднем и приложения.

## *ТЕМА 4 Основные алгебро-геометрические понятия в математике

**высоких размерностей - 26 часов.**

$n$-мерное арифметическое пространство, евклидово пространство. Метрика и метрические пространства. Примеры метрик в $\boldsymbol{R}$. Неравенства Гельдера и Минковского. Неравенство треугольника. Предел и непрерывность в метрических пространствах. Норма, нормированные пространства. Пространства последовательностей, функций. Задачи на определение расстояние между функциями.

Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Линейное пространство. Гомоморфизмы. Подпространства. Ядро и образ гомоморфизма. Факторпространства.Линейные оболочки и порождение.Линейно независимые системы векторов. Базисы. Теорема о существовании базиса и равномощность базисов. Размерность пространства. Координаты вектора и матрица линейного отображения. Ранг матрицы и его связь с размерностью. Операции над матрицами. Координаты вектора и матрица при переходе к другому базису. Подобие матриц. Определители: Определение и свойства. Вычисление определителей. Приложение к линейным системам.

Прямые суммы , прямые дополнение. Скалярные произведения. Ортогональное дополнение и проектирование на подпространство. Метод наименьших квадратов.

## ТЕМА 5. Дифференциальные уравнения - 20 часов

Определение. Основные понятия. Дифференциальные уравненния с разделяющимися переменными 1-го порядка. Однородные уравнения 1-го порядка и приводимые к ним. Дифференциальные уравнения 1-го порядка в полных дифференциалах, интегрирующий множитель. Линейные однородные и неоднородные диф. уравнения 1-го порядка. Уравнения Бернулли и Риккати. Линейные однородные диф. уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами (приводимый и неприводимый случаи). Общие положения линейных однородных: диф. уравнений 2-го порядка. Метод вариаций произвольных постоянных в решении линейных неоднородных диф. уравнений 2-го порядка. Метод неопределенных коэффициентов. Системы линейных диф. уравнений 1-го порядка с двумя и тремя неизвестными функциями с постоянными коэффициентами, однородные и неоднородные. Приложения в геометрии и в физике.

## *ТЕМА 6. Выпуклые множества и функции - 18 часов (повторение и развитие темы)

Определение выпуклых множеств. Свойства. Определение выпуклых и вогнутых функций на выпуклых множествах в произвольных линейных пространствах. Задание выпуклых множеств с помощью выпуклых (вогнутых) функций. Критерий выпуклости. Неравенство Иенсена. Критерии выпуклости непрерывных и диффреренцируемых функций. Основные конструкции для выпуклых (вогнутых) функций. Использование выпуклости и вогнутости в доказательстве неравенств. Метод Штурма. Неравенство для среднестепенных и средневзвешанных. Принцип выпуклого и линейного программирования.

## ТЕМА 7 Комплексные числа - 24 часа.

Традиционная модель комплексных чисел. Линейно-алгебраическая модель. Полиномиальная модель. Формула Муавра-Лапласа. Извлечение корней. Первообразные корни. Решение уравнений высоких степеней. Комплексификация и декомплексификация. Геометрические приложения комплексных чисел. Алгебраическая замкнутость над полем комплесных чисел. Предел и непрерывность в $\boldsymbol{C}$. *Производная в $\boldsymbol{C}$. *Условие Коши-Римана. *Алгебраические функции. *Корень и логарифм в комплексной области.

## ТЕМА 8. Приближённые методы решения уравнений - 8 часов

Задача о неподвижной точке. Сжимающие отовражения. Теорема Банаха-Пикара и метод итераций. Достаточный критерий сжимаемости. Метод хорд и метод касательных. Отделение корней.

**ТЕМА 9. Приближённое вычисление функций - 10 часов**

Интреполяционный многочлен Лагранжа, Ньютона. Остаточный член. Многочлен Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа. Многочлены Тейлора для элементарных функций. Многочлен Тейлора для функций многих переменных. Остаточные члены формул численного интегрирования.

**ТЕМА 10. Комбинаторика - 16 часов**

Основные комбинаторные конструкции. Формальные ряды. Производящие функции. Метод производящих функций в комбинаторных задачах. Связь с реккурентными соотношениями. Прикладная комбинаторика (основные задачи).

**ТЕМА 11. Основные понятия теории вероятности - 20 часов**

Частотное определение вероятности. Аксиоматика теории вероятности. Теорема сложения. Несовместность и независимость. Условная вероятность. Формула умножения. Формула Бернулли. Закон больших чисел. Случайная величина. Математическое ожидание. Дисперсия. Коэффициент корелляции. Метод наименьших квадратов.

**ТЕМА 13. Обобщающее повторение - 36 часов**.

**ПРОГРАММА ПО ГЕОМЕТРИИ (1+1=2 часа. Всего 68 часов)**
**(вопросы программы отмеченные * отнесены к спец. курсу)**

**ТЕМА 1. Площади. 6 часов**

Свойства площади. Квадрируемые фигуры. Площадь при проектировании на плоскость. Теорема Пифагора для площадей. Боковая поверхность призмы, пирамиды, усеченной пирамиды.

**ТЕМА 2. Обьёмы. 10 часов**

Обьём. Кубируемые фигуры. Обьём параллелипипеда (наклонного), призмы, пирамиды. Объём пирамиды через скрещивающиеся рёбра, через серединное сечение. Обьеём усеченной пирамиды. Принцип Кавальери.

**ТЕМА 3. Тела вращения. 6 часов.**

Тела вращения. Цилиндр. Конус. Развертки. Боковая поверхность цилиндра. Обьём цилиндра. Боковая поверхность конуса. Обьём конуса. Обьём усеченного конуса.

**ТЕМА 4. Сфера, шар. 6 часов**

Сфера. Взаимное расположение сферы и плоскости. Шар. Площадь поверхности сферы, сферического сегмента. Обьём шара. Обьём шарового сегмента.

**ТЕМА 5. Комбинации фигур. 10 часов**

Комбинации фигур. Шар вписанный в многогранник, пирамиду, призму, цилиндр, конус. Шар описанный вокруг пирамиды, призмы, цилинда, конуса.

**ТЕМА 6. Многогранные углы. 10 часов**

Многогранные углы. Теорема косинусов, синусов для трехгранных углов. Неравенство для плоских углов. Теорема о сумме плоских углов.

*ТЕМА 7. Неравенство, оценки, экстремальные задачи в планиметрии
и стереометрии. – 10 часов

**ТЕМА 8. Векторная алгебра, аналитическая и барицентрическая геометрии. 10 часов (+20 за счёт спецкурса)**

Вектора на плоскости и в пространстве. *Векторная алгебра: скалярное произведение; внешнее произведение на плоскости; векторное и смешанное произведения в пространстве; их геометрические содержание.*Основные свойства и алгебраические соотношения. *Векторная интерпретация планиметрии и стереометрии. (*Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве — основные качественные и метрические характеристики в векторном исполнении). Барицентрическая геометрия.

**Автор программы Альт Аркадий Маркович**

"УТВЕРЖДАЮ"
Директор СШ N 100
В.Н.Кубенский

УЧЕБНЫЙ ПЛАН

для классов с углубленным теоретическим и практическим изучением информатики и математики на1989/90 уч.год

| Учебные предметы | Количество часов в неделю |
|---|---|
| Украинская литература | 3 |
| Русский язык | 1 |
| Русская литература | 3 |
| Английский язык | 1 |
| История | 3 |
| Обществоведение | 2 |
| Биология | 1 |
| Физика и астрономия | 5 |
| Химия | 2 |
| Физкультура | 2 |
| Начальная военная подготовка | 1 |
| Алгебра и мат. анализ<br>методы алгоритмизации | 5 |
| Геометрия | 1 |

| | |
|---|---|
| Информатика ( практика) | 1 |
| Спец. курс по математике<br>(Геометрия-1, алгебра, анализ-2) | 3 |
| Математич. практикум | 4 |
| Всего обязательных часов | 38 |

Примечание;при проведении практических.занятий
(мат-практикум, практикум по информатике) класс при наличии 25 учащихся и более делится на группы.

ДОПОЛНЕНИЕ( извлечение из архивных материалов)

Структура часов (обьём нагрузки на неделю)

4 часа – математика общая.

4 часа – информатика . (2 часа –теория +(1+1) практики)

4 часа – трудовое обучение( с делением на группы)

4+4 часа – матпрактикум (с делением на группы)

3 часа факультатив на спецкурс.

Распределение времени (одно из возможных):

4+2—математика, математические основы алгоритмизации;

8—матпрактикум.

3 часа спецкурс.

Итого на математику и математико-прикладные цели 17 часов в неделю плюс 5 часов в семинарский день.

На самом деле, в зависимости от локальных целей, во времени учебного года допускается оперативное перераспределение часов. Например уменьшается или увеличивается количество часов на геометрию, на математические методы алгоритмизацию, на алгебру, на анализ, повторение. Оперативно перераспределяется обьём часов с учётом обнаруженных недочётов, пробелов. Далее, вообще говоря, спецкурс не обязателен для всех, но местами адресован всем. Весь смысл в гибком и быстром реагировании с использованием всего резерва времени и возможности его оптимально перераспределять. Главное—достижение цели курса путём реализации программы в целом.